Wrażliwość obligacji

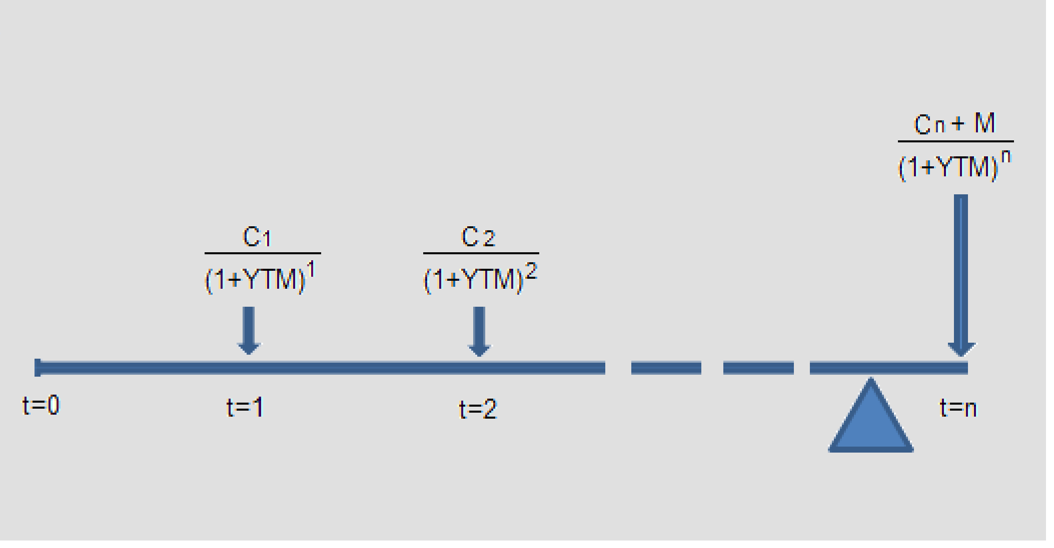
Jednym z czynników ryzyka inwestowania w obligacje jest zmienność rynkowych stóp procentowych. Inżynieria finansowa dysponuje metodami pozwalającymi zabezpieczyć portfel przed negatywnymi skutkami zmian stóp procentowych.

Czas trwania obligacji

Istotnym czynnikiem mającym wpływ na cenę obligacji jest poziom rynkowych stóp procentowych. Mają one kluczowe znaczenie dla kształtowania się oczekiwań, co do stóp zwrotu z inwestycji w dłużne papiery wartościowe. Miarą ryzyka stóp procentowych jest czas trwania obligacji *(ang. Mcaulay duration),* szacowany metodami matematycznymi z uwzględnieniem generowanych przez nią strumieni pieniężnych. Wskaźnik ten stanowi średnią ważoną okresów otrzymywania przepływów pieniężnych z tytułu posiadania obligacji.

Jego zależy od wysokości i częstotliwości wypłat kuponów odsetkowych, ceny wykupu, oczekiwanej stopy zwrotu oraz zapłaconej ceny za obligację.

Rys. 1. Graficzne ujęcie duration



Punkt podparcia na osi czasu, w którym następuje równowaga odpowiada graficznie czasowi trwania obligacji.

Czas trwania obligacji stanowi podstawę analizy dłużnych papierów wartościowych w celu:

- oszacowania ich cen przy różnych poziomach stóp procentowych oraz oczekiwaniach rynkowych w obrocie tymi papierami
- zabezpieczenia się przed stratą poprzez zajęcie przeciwnej pozycji, równoważącej ryzykowną ekspozycję;

- redukcji luki niedopasowania wynikającej z różnych terminów zapadalności aktywów i wymagalności pasywów;
- podejmowania decyzji inwestycyjnych przy określaniu wymaganej rentowności;
- zarządzania portfelem różnego rodzaju aktywów finansowych, w tym monitorowania ryzyka portfela.

W kalkulacji czasu trwania obligacji zakłada się płaską strukturę czasową stóp procentowych oraz reinwestowanie otrzymanych kuponów odsetkowych według stopy procentowej równej YTM.

Wartość czasu trwania obligacji określa formuła matematyczna będąca funkcją pochodną od funkcji dla wyceny obligacji:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i \times \frac{C_i}{(1+YTM)^i} + n \times \frac{C_n + M}{(1+YTM)^n}}{P} \qquad (1)$$

gdzie:

D - czas trwania obligacji (Mcaulay duration), wyrażony w latach
C_i – okresowo wypłacane kupony odsetkowe od obligacji
i – okresy odsetkowe
n – liczba okresów odsetkowych do wykupu obligacji
M – cena wykupu obligacji
P – cena rynkowa obligacji określona metodą zdyskontowanych przepływów pieniężnych z obligacji na podstwie wzoru:

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+YTM)^i} + \frac{C+M}{(1+YTM)^n} \qquad (2)$$

Dla obligacji o stałym oprocentowaniu, które będą przedmiotem dalszych analiz formuła na obliczenie czasu trwania obligacji przybiera postać:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i \times \frac{C}{(1+YTM)^i} + n \times \frac{C + M}{(1+YTM)^n}}{P} \qquad (3)$$

Zdyskontowane przepływy pieniężne w okresie do wykupu obligacji równoważą zapłaconą cenę, zmniejszając poziom zaangażowania kapitałowego i w konsekwencji ryzyko kredytowe.

Własności czasu trwania obligacji (**duration)**

- Przy danym okresie do wykupu i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im wyższe oprocentowanie obligacji, tym krótszy czas trwania obligacji.

- Przy danym oprocentowaniu obligacji i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im dłuższy okres do wykupu, tym dłuższy czas trwania obligacji.
- Przy danym oprocentowaniu obligacji i danym czasie do wykupu, im niższa stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM, tym dłuższy czas trwania obligacji.
- Czas trwania obligacji obligacji kuponowej nie może być krótszy niż termin do pierwszej wypłaty odsetek ani dłuższy niż okres do jej wykupu.
- Czas trwania obligacji obligacji zerokuponowej jest równy okresowi ważności tej obligacji, gdyż do dnia wykupu nie mają miejsca przepływy finansowe.

Przykład 1

Na rynku są notowane obligacje o stałym oprocentowaniu nominalnym 6% wypłacanym raz do roku. Wykup obligacji nastąpi za 3 lata po cenie równej wartości nominalnej 100 zł. Należy określić czas trwania obligacji przy trzech scenariuszach różnych stóp procentowych, czyli oczekiwanych stopach zwrotu: 4%, 6%, 8%.

Scenariusz 1 – YTM = 4%

$$P = \frac{6}{(1+0,04)^1} + \frac{6}{(1+0,04)^2} + \frac{6+100}{(1+0,04)^3} = 105,55 \text{ zł}$$

$$D = \frac{1\times\frac{6}{(1+0,04)^1} + 2\times\frac{6}{(1+0,04)^2} + 3\times\frac{6+100}{(1+0,04)^3}}{105,55} = 2,838 \text{ lat}$$

Analogiczne obliczenia zostały przeprowadzone dla pozostałych scenariuszy, a wyniki zestawione są w tabeli 1.

Czas trwania portfela wielu obligacji jest średnią ważoną czasów trwania poszczególnych obligacji. Wagami są udziały wartości tych obligacji w wartości całego portfela.

Czas trwania obligacji pozwala określić wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na zmiany cen obligacji.

Formuły 1 i 3 mają zastosowanie przy ciągłej kapitalizacji rynkowych stóp procentowych. W praktyce odsetki od obligacji są wypłacane co pewien okres (kapitalizacja dyskretna), stąd stosuje się zmodyfikowaną formę czasu trwania obligacji:

$$MD = \frac{D}{1+YTM} \qquad (4)$$

gdzie:

D – czas trwania obligacji
YTM – oczekiwana stopa zwrotu w okresie do wykupu

Przykład 2

Podstawiając dane z przykładu 1, scenariusz 1 otrzymujemy:

$$MD = \frac{2{,}838}{1+0{,}04} = 2{,}729 \text{ lat}$$

Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń dla scenariuszy z przykładu 1

Odsetki C=6%, cena wykupu M=100				
Scenariusz	**YTM**	**P**	**D (lata)**	**MD (lata)**
1	4%	105,55	2,838	2,729
2	6%	100,00	2,833	2,673
3	8%	94,85	2,829	2,619

W oparciu o zmodyfikowany czas trwania obligacji można oszacować zmiany cen obligacji przy zmianach rynkowych stóp procentowych wg następującej formuły:

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD \times \Delta r \qquad (5)$$

gdzie:

$\frac{\Delta P}{P}$ - względna zmiana ceny obligacji

MD - zmodyfikowany czas trwania obligacji

Δr - zmiana rynkowej stopy procentowej

Jak wynika z wzoru 5 zmienność ceny obligacji zależy od zmodyfikowanego czasu trwania obligacji oraz zmiany rynkowych stóp procentowych. Im dłuższy jest czas trwania obligacji tym zmiana obligacja jest bardziej wrażliwa na wahania stóp procentowych.

Przykład 2

Dla obligacji z przykładu 1, scenariusz 2 (tabela 1) należy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych o 2 punkty procentowe.

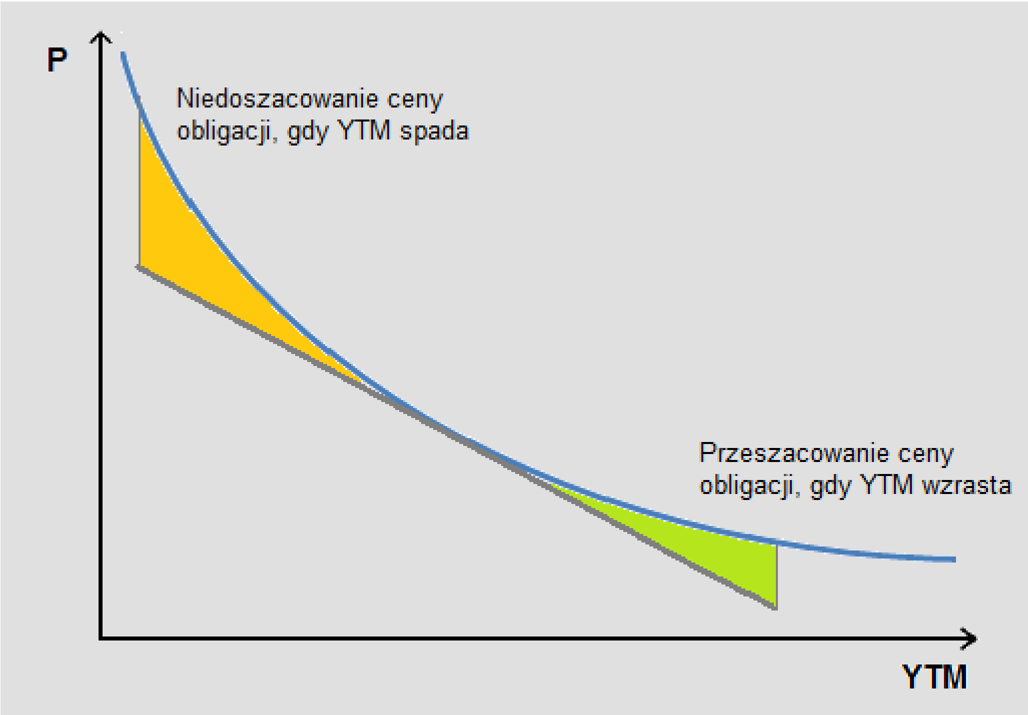
- Wzrost stóp procentowych:

$$\frac{\Delta P}{P} = -2{,}673 \times 2\% = -5{,}35\%$$

- Spadek stóp procentowych:

$$\frac{\Delta P}{P} = -2{,}673 \times (-2\%) = 5{,}35\%$$

Porównajmy otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi w oparciu o zdyskontowane przepływy pieniężne (tabela 1) - tutaj zmiany cen obligacji wyniosły odpowiednio -5,55% oraz +5,15%. Jak widać, metoda obliczeń opartych na wartości czasu trwania obligacji jest obarczona błędem, którego wielkość zależy od zakresu zmian rynkowych stóp procentowych (oczekiwanych stóp zwrotu). Gdy wzrasta oczekiwana stopa zwrotu cena obligacji jest niedoszacowana, z kolei jeżeli spada – cena obligacji jest przeszacowana. Ceny obligacji określone na podstawie zdyskontowanych przepływów pieniężnych układają się na hiperboli o określonej wypukłości *(ang. convexity)*. Tymczasem przy metodzie obliczeń z wykorzystaniem zmodyfikowanego czasu trwania obligacji zmiany cen mają charakter liniowy. Stąd wynika rozbieżność pomiędzy wynikami z obu metod.



Do korygowania różnic używa się wskaźnika *convexity* obliczonego, jako druga pochodna formuły opisującej cenę obligacji (2). Dla obligacji znajdujących się w obrocie jest on publikowany w serwisach informacyjnych, np. Bloomberg i Reuters.

Budowa portfela obligacji o stałym oprocentowaniu

Ryzyko inwestycji w obligacje o stałym oprocentowaniu wynika ze zmian stóp procentowych i dotyczy inwestorów, którzy te obligacje zamierzają sprzedać przed datą wykupu. Jeżeli stopy procentowe rosną wówczas spadają rynkowe ceny obligacji. I na odwrót – na obniżkach stóp procentowych posiadacze obligacji tracą. Im dłuższy okres do wykupu obligacji, tym zmienność ich cen wyższa.
Zatem spodziewając się wzrostu stóp procentowych należy redukować z portfela obligacje o długich terminach wykupu na korzyść obligacji krótkoterminowych. W przypadku przewidywań spadku stóp procentowych należy przeważać portfel obligacjami długoterminowymi a pozbywać się obligacji o krótkich terminach wykupu.

Stosując inżynierię finansową można zbudować portfel wielu obligacji, który będzie odporny na zmiany rynkowych stóp procentowych *(ang. immunization)*. Takie uodpornienie portfela obligacji wymaga określenia odpowiednich udziałów poszczególnych składników.

Przykład:
Inwestor zamierza zainwestować w portfel obligacji o stałym oprocentowaniu tak aby za 3 lata otrzymać kwotę 1.000.000 zł bez względu na zmiany rynkowych stóp procentowych. Oczekiwana stopa zwrotu z całej inwestycji wynosi 5%. Operacja uodpornienia portfela będzie wymagać doboru odpowiedniej liczby obligacji aby czas jego trwania był równy 3 lata.

Na rynku są dostępne 2 rodzaje obligacji o stałym oprocentowaniu:

- 2-letnie o wartości nominalnej 100 zł i odsetkach rocznych wynoszących 4,7%;
- 4-letnie o wartości nominalnej 100 zł i odsetkach rocznych wynoszących 5,2%.

Wobec oczekiwanej stopy zwrotu w okresie do wykupu 5%, z obliczeń w oparciu o wzór (2) wynika, że należy zapłacić za 2-letnią obligację cenę 99,44 zł a za 4-letnią 100,71 zł.

Czas trwania obligacji (Macaulay duration) obliczony na podstawie wzoru (3) wynosi:

- 2-letnie D_1 = 1,955 lat
- 4-letnie D_2 = 3,714 lat

Czas trwania portfela tych obligacji, będący średnią ważoną czasów trwania poszczególnych obligacji wynosi 3 lata. Stąd zachodzą relacje, które są zestawione poniżej w układzie dwóch równań:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$D_1 \times w_1 \times + D_2 \times w_2 = 3 \text{ lata}$$

gdzie:

w_1 – udział obligacji 2-letnich
w_2 – udział obligacji 4-letnich
D_1 – czas trwania obligacji 2-letnich
D_2 – czas trwania obligacji 4-letnich

Po podstawieniu danych:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$1{,}955 \times w_1 + 3{,}714 \times w_2 = 3$$

otrzymujemy:

w_1 = 0,41
w_2 = 0,59

Łączna kwota, jaką należy zainwestować w obligacje przy oczekiwanej stopie zwrotu 5% wynosi:

$$\frac{1.000.000}{(1+0{,}05)^3} = 863.838 \text{ zł}$$

Na poszczególne obligacje przypadają kwoty:

- 2-letnie: 863.838 x 0,41 = 350.700 zł
- 4-letnie: 863.838 x 0,59 = 513.138 zł

Stąd liczby poszczególnych obligacji wynoszą:

- 2-letnie: 350.700 zł / 99,44 zł = 3.527 sztuk
- 4-letnie: 513.138 zł / 100,71 zł = 5.095 sztuk

Zakłada się, że obligacje 2-letnie zostaną po 2 latach wykupione a kwota wykupu oraz odsetki z obydwu kuponów będą reinwestowane po oczekiwanej stopie zwrotu. Natomiast obligacje 4-letnie po 3 latach zostaną sprzedane po cenie rynkowej. W tym przypadku teoretyczna cena stanowi zdyskontowany strumień przychodów z wykupu obligacji oraz ostatniej wypłaty odsetek.

Wartość portfela obligacji po 3 latach

Scenariusz 1 – stopy procentowe pozostają na niezmienionym poziomie.

- Obligacje 2-letnie:

$$3527 \times \left[4{,}70 \times (1+0{,}05)^2 + 104{,}70 \times (1+0{,}05)\right] = 406.017 \text{ zł}$$

- Obligacje 4-letnie:

$$5095 \times \left[5{,}20 \times (1+0{,}05)^2 + 5{,}20 \times (1+0{,}05) + 5{,}20 + 105{,}20 \times (1+0{,}05)^{-1}\right] = 593.993 \text{ zł}$$

Razem ok. 1.000.000 zł

Scenariusz 2 - wzrost stóp procentowych o 2 punkty procentowe

- Obligacje 2-letnie:

$$3527 \times \left[4{,}70 \times (1+0{,}07)^2 + 104{,}70 \times (1+0{,}07)\right] = 414.105 \text{ zł}$$

- Obligacje 4-letnie:

$$5095 \times \left[5{,}20 \times (1+0{,}07)^2 + 5{,}20 \times (1+0{,}07) + 5{,}20 + 105{,}20 \times (1+0{,}07)^{-1}\right] = 586.105 \text{ zł}$$

Razem 1.000.210 zł

Scenariusz 3 - Spadek stóp procentowych o 2 punkty procentowe

- Obligacje 2-letnie:

$$3527 \times \left[4{,}70 \times (1 + 0{,}03)^{2} + 104{,}70 \times (1 + 0{,}03)\right] = 397.942 \text{ zł}$$

- Obligacje 4-letnie:

$$5095 \times \left[5{,}20 \times (1 + 0{,}03)^{2} + 5{,}20 \times (1 + 0{,}03) + 5{,}20 + 105{,}20 \times (1 + 0{,}03)^{-1}\right] = 602.273 \text{ zł}$$

Razem: ok. 1.000.214 zł

Jak widać, w każdym scenariuszu rynkowym wartość portfela obligacji pozostała na poziomie zbliżonym do założonej wartości 1.000.000 zł. Dzięki właściwemu doborowi udziałów poszczególnych obligacji portfel stał się niewrażliwy na zmiany stóp procentowych, zapewniając jednocześnie osiągnięcie oczekiwanej stopy zwrotu. W oparciu o metodę immunizacji można skonstruować portfel niewrażliwy na sytuację rynkową w oparciu o dowolną liczbę rodzajów obligacji.